SESIÓN 9

APLICACIONES DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS, DERIVACION DE FUNCIONES COMPUESTAS O REGLA DE LA CADENA

I. CONTENIDOS:

1. Ejercicios resueltos aplicando máximos y mínimos (cont.)
2. Ejercicios propuestos de aplicación de máximos y mínimos
3. Derivación de funciones compuestas o regla de la cadena
4. Derivación de funciones implícitas
5. Ejercicios resueltos
6. Estrategias Centradas en el Aprendizaje: Ejercicios propuestos

II. OBJETIVOS:

Al término de la Clase, el alumno:

- Resolverá problemas aplicando máximos y mínimos
- Comprenderá la derivación de las funciones compuestas
- Comprenderá la derivación de funciones implícitas
- Resolverá problemas de derivación de las funciones compuestas e implícitas

III. PROBLEMATIZACIÓN:

Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.

- ¿Cuál es el concepto y aplicaciones de la regla de la cadena?
- ¿Cómo se deriva una función implícita?

IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO:

1.1. Ejercicios resueltos aplicando máximos y mínimos (cont.)

1. El costo del diesel que consume una locomotora por hora de operación en Km/Hr viene dado por la siguiente función $C = \frac{v^2+3600}{v}$ cuando su velocidad es de 40 Km/Hr. Calcule la velocidad que debe desarrollar la máquina para optimizar el uso de diesel.

Solución:
La función puede simplificarse: $C = v + \frac{3600}{v}$ esto es con el propósito de facilitar su derivación. Derivando esta expresión con respecto a v, tenemos $\frac{dc}{dv} = \frac{d}{dv}(v + \frac{3600}{v}) = 1 - \frac{3600}{v^2}$ igualando a cero esta expresión y factorizando nos queda $\frac{(v-60)(v+60)}{v^2} = 0$ resolviendo esta ecuación las raíces o valores críticos son $v_1 = -60$ y $v_2 = 60$ la primera raíz no tiene sentido ya que $v > 0$ entonces la única solución para el valor crítico es $v = 60$ para optimizar el uso de diesel la velocidad de la locomotora debe ser de 60 Km/Hr

2. En una empresa manufacturera el costo total para producir x unidades diarias de un producto viene dado por la función $C = \frac{1}{2}x^2 + 35x + 25$ Dls, y el precio de venta de cada unidad viene dado por la función $V = 50 - \frac{1}{2}x$ Dls. Calcule el número de unidades que deben ser vendidas diariamente para que la utilidad sea máxima.

Solución: La utilidad U es igual al ingreso diario que se obtiene por la venta del total de unidades, menos el costo de producción de dichas unidades, es decir: $U = x\left(50 - \frac{1}{2}x\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 + 35x + 25\right)$ realizando las operaciones algebraicas, simplificando y derivando con respecto a x para hallar un máximo, tenemos: $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} = 15 - \frac{3x}{2}$ igualando esta ecuación a cero y resolviendo, obtenemos el valor crítico $x = 10$ por lo que la producción que nos da el mayor beneficio es de 10 unidades diarias.

2.1. Ejercicios propuestos de aplicación de máximos y mínimos

1. Encuentre dos números positivos cuya suma sea 20 y su producto sea máximo.
2. Encuentre dos números positivos cuyo producto sea 16 y su suma sea mínima.
3. Calcule las dimensiones de una caja rectangular abierta en su parte superior cuya

Capacidad sea de 6400 cm^3 para que su fabricación resulte la más económica posible teniendo en cuenta que el precio de la base es de 75 pesos y el de las caras laterales es de 25 pesos por cm^2.

4. En un determinado momento, un barco B se encuentra a 65 millas náuticas al este de otro barco A. El barco B empieza a navegar hacia el oeste con una velocidad de 10 millas náuticas por hora, mientras que el barco A lo hace con dirección sur a una velocidad de 15 millas náuticas por hora si las rutas iníciales no se modifican, calcular el tiempo que pasará para que la distancia que los separe sea mínima.

5. El área de un terreno de superficie rectangular es de 180 m^2. Sabemos que en su interior hay otra área rectangular de tal forma que los márgenes superior e inferior son de 7.5 m y que los márgenes laterales son de 5 m. Calcule las medidas de la superficie exterior para que el área que queda comprendida entre los márgenes de estos dos terrenos sea la máxima posible

3.1. Derivación de funciones compuestas o la regla de la cadena

Este concepto se refiere aquellas funciones que están compuestas de otras funciones, da la idea como si estas fueran los eslabones que unen a una cadena, para entender mejor este concepto veamos el siguiente ejemplo.

En una empresa manufacturera C representa el costo total para producir s unidades de un producto, siendo el costo una función de la cantidad de unidades producidas, podemos entonces representar matemáticamente de la siguiente manera:

$$C = f(s)$$

Ahora consideremos que a medida que avanza el turno de trabajo, es decir, a medida que pasa el tiempo (t) el número de unidades producidas aumenta, entonces s es una función de t, esto lo podemnos simbolizae de la siguiente manera:

$$s = g(t)$$

Si conocemos $\frac{ds}{dt}$ que nos representa los cambios del número de unidades producidas en un tiempo t, digamos en horas es posible que podríamos determinar $\frac{dC}{dt}$, que nos representa el cambio del costo total de producción en el ese tiempo considerado.

Este cálculo puede realizarse aplicando el concepto de la **regla de la cadena.**

Teorema: Si y es una función de u y $\frac{dy}{du}$ existe, y si y es función de x y $\frac{du}{dx}$ existe, entonces y es función de x y $\frac{dy}{dx}$ existe, entonces.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Esto nos sugiere una “división” de du en el numerador y en el denominador del lado derecho de la ecuación, sin embargo recuerde que estas notaciones no tienen el significado de una fracción.

Regla de la cadena para derivar potencias: Si f y g son funciones de tal manera que $f(x) = y = (g(x))^n$ siendo n cualquier número real y si la derivada de x existe, y, si $g(x) = u$ entonces

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

La demostración de esta regla es compleja y rebasa los propósitos de este curso introductorio al cálculo, razón por lo que se omite.

4.1. Derivación de funciones implícitas

Formas explícitas e implícitas de una ecuación: Es común que las ecuaciones en dos variables sean expresadas en forma **explícita,** esto quiere decir, que una de las dos variables está **despejada** en función de la otra, son ejemplo de esto las ecuaciones:

$y = 5x^2 - 3x + 3$ $\quad v = \frac{1}{2}gt^2$ $\quad y = 4x + 6$

Sin embargo algunas veces la ecuación contiene dos variables que no están explícitas para ninguna de las dos variables, entonces decimos que tenemos una función **implícita,** son ejemplo de esta tipo de funciones las siguientes:

$x^2 + 5xy - y^2 = 4$ $\quad x^2 + y^2 = 25$ $\quad 12x = 18y + 4y^3 + 5y^4$

Cuando y está definida como una función implícita de x tal vez no sea conveniente resolver la ecuación para resolverla como una función explícita de x o x como una función explícita de y.

Para poder derivar este tipo de ecuaciones aplicamos la siguiente técnica:

1. Derívese la función dada, término a término, considerando a y como una función de x

2. De la ecuación que resulta despéjese $\frac{dy}{dx}$

5.1. Ejercicios resueltos

Aplicando la regla de la cadena encuentre $\frac{dy}{dx}$ para las siguientes funciones compuestas

1. $y = u^5$ y $u = 2x^3 - 5x^2 + 4$

Considerando a y como una función de u, siendo esta última una función de x, tenemos

De la regla de la cadena se tiene: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(u^5) \cdot \frac{d}{dx}(2x^3 - 5x^2 + 4) = 5u^4(6x^2 - 10x)$

Sustituyendo a u en esta expresión, se tiene:

$\frac{dy}{dx} = (5\ 2x^3 - 5x^2 + 4)^4$ Que es la derivada buscada

2. En una empresa metal mecánica el costo total (C) Dls. para producir s artículos viene dado por la siguiente función:

$C = \frac{1}{2}s^2 + 2s + 1000$

Por otro lado, si se producen s unidades durante t horas depués de haberse iniciado el turno y esto viene dado por la siguiente función $s = 3t^2 + 50t$

Determine el cambio del costo total de la producción dos horas después de haberse iniciado el turno. Solución: Requerimos conocer $\frac{dC}{dt}$ cuando $t = 2$ aplicando la regla de la cadena se tiene $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$ Derivando $\frac{dC}{ds} = \frac{1}{2}s + 2$ y $\frac{ds}{dt} = 6t + 50$ sustituyendo $\frac{dC}{dt} = \left(\frac{1}{2}s + 2\right)(6t + 50)$

Haciendo $t = 2$ y sustituyendo en la segunda ecuación se tiene

$s = 3(2^2) + 50(2) = 112$ sustituyendo este valor en la derivada obtenida

$\frac{dC}{dt} = \left(\frac{1}{2}(112) + 2\right)\left((6)(2) + 50\right) = (58)(62) = 3596$ De esta manera hemos determinado que dos horas después de haberse iniciado la producción el costo tiene una razón de 3596 Dls por hora

3. Aplicando la regla de la cadena encuentre la derivada de la siguiente función

$y = \frac{1}{4x^3+5x^2-7x+8}$, el denominador se puede expresar como una potencia negativa y después

se aplica la regla de la cadena para potencias y se obtiene su derivada

$y = (4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-1}$

$\frac{d}{dx} = -1(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-2}\ (12x^2 + 10x - 7) = \frac{-12x^2-10x+7}{(4x^3+5x^2-7x+8)^2}$, que es la derivada buscada

4. Aplicando la regla de la cadena para las potencias derivar la función

$y = (2x - 1)^3$ hagamos $u = 2x - 1$ y $y = u^3$ derivando tenemos $\frac{d}{du}(u^3) = 3u^2$ y

$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(2x - 1) = 2$ sustituyendo en $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (3u^2)(2) = 6u^2 = 6\,(2x - 1)^2$ que es la derivada buscada

5. Aplicando la regla para derivar funciones implícitas encuentre $\frac{dy}{dx}$ en la siguiente función

$$x^2 - 2xy + y^2 = 8$$

Aplicando la regla tenemos: $\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(2xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(8)$

$2x - 2x\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dx}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$; factorizando y transponiendo términos, tenemos:

$\frac{dy}{dx}(2y - 2x) = 2y - 2x$; despejando $\frac{dy}{dx}$ y simplificando nos queda $\frac{dy}{dx} = \frac{2y-2x}{2y-2x} = 1 \therefore \frac{dy}{dx} = 1$

6. Aplicando la regla para derivar funciones implícitas determine $\frac{dy}{dx}$ de la siguiente función

$x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2$; aplicando la regla se tiene: $\frac{d}{dx}(x^6) - \frac{d}{dx}(2x) = \frac{d}{dx}(3y^6) + \frac{d}{dx}(y^5) - \frac{d}{dx}(y^2)$

Derivando ambos miembros de ecuación tenemos: $6x^5 - 2 = 18y^5 \cdot \frac{dx}{dy} + 5y^4 \cdot \frac{dy}{dx} - 2y \cdot \frac{dy}{dx}$

Factorizando el segundo miembro se tiene: $6x^5 - 2 = (18y^5 + 5y^4 - 2y)\frac{dy}{dx}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{6x^5-2}{18y^5+5y^2-2y}$ que es la derivada buscada

7. Aplicando la regla para derivar funciones implícitas determine $\frac{dy}{dx}$ para la siguiente función

$$3x^4y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y$$

Derivando en ambos miembros de ecuación: $12x^3y^2 + 3x^4(2y)\frac{dy}{dx} - 7y^3 - 7x(3y^2)\frac{dy}{dx} = 0 - 8\frac{dy}{dx}$

Factorizando y transponiendo términos se tiene: $\frac{dy}{dx}\,(6x^4y - 21xy^2 + 8) = 7y^3 - 12x^3y^2$

Despejando $\frac{dy}{dx}$ tenemos: $\frac{dy}{dx} = \frac{7y^3-12x^3}{6x^4y-21xy^2+8}$ que es la derivada buscada

8. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^3 + y^3 = 9$ en el punto (1,2)

Por diferenciación implícita de y con respecto a x se tiene:

$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$; despejando y simplificando se tiene: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$; por lo que en el punto

(1,2), $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$ por lo que la ecuación de la recta tangente a la curva en ese punto es:

$y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 1)$ simplificando nos queda: $x + 4y = 9$ que es la ecuación pedida.

6.1. ESTRATEGIAS CENTRADAS EN EL APRENDIZAJE: Ejercicios propuestos

Aplicando la regla de la cadena determine $\frac{dy}{dx}$ las siguientes funciones

a) $y = u^6$ $\qquad$ $u = 1 + 2\sqrt{x}$

b) $y = \sqrt{2u}$ -u^2 $\qquad$ $u = x^3 - x$

c) $y = \frac{a-u}{a+u}$ $\qquad$ $u = \frac{b-x}{b+x}$

d) $y = u\sqrt{a^2 - u^2}$ $\qquad$ $u = \sqrt{1 - x^2}$

Derive las siguientes funciones implícitas

a) $x^2 + y^2 = 16$ $\qquad$ b) $x^2 + y^2 = 7xy$ - $\qquad$ c) $4x^2 - 9y^2 = 1$

d) $x^3 + y^3 = 8xy$ $\qquad$ e) $15x = 15y + 5y^3 + 3y^5$ $\qquad$ f) $x^3 + 3x^2y + y^3 = c^3$